Lösung eines sich auf die „Geometria situs“ beziehenden Problems *

Leonhard Euler

§1 Außer jenem Teil der Geometrie, der sich um Größen herum dreht und zu jeder Zeit mit Größtem Eifer entwickelt worden ist, hat von einem anderen, immer noch äußerst unbekannten Teil, als erster Leibniz eine Erwähnung gemacht, welche er „Geometria situs “ (Geometrie der Lage) genannt hat. Dieser Teil wird von selbigem festgesetzt, allein vom Bestimmen der Lage eingenommen zu sein. Bei dieser Aufgabe sei weder auf die Größen zu achten, noch sei die Berechnung von Größen zu gebrauchen. Aber Probleme, von welcher Art sich auf diese Geometrie situs beziehen, und was für eine Methode beim Auflösen von ihnen von Nöten ist. Deswegen, nachdem neulich die Erwähnung eines gewissen Problems gemacht worden ist, was sich freilich auf die Geometrie zu beziehen schien, aber so beschaffen war, dass es weder die Bestimmung von Größen verlangte, noch eine Lösung mit Hilfe eines Größenkalküls zuließ, habe ich nicht gezweifelt, es zur Geometria situs zu zählen, zumal bei seiner Lösung allein die Lage in die Betrachtung eingeht, Rechnung hingegen von überhaupt keinem Nutzen ist. Ich habe also beschlossen, meine Methode, welche ich, um Probleme von dieser Art zu lösen, gefunden habe, als Beispiel für die Geometria situs hier darzulegen.

§2 Aber dieses ziemlich bekannte Problem, welches mir erzählt wurde, war das folgende: In Königsberg in Preußen befindet sich eine Insel A, der

*Originaltitel: „Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis“, erstmals publiziert in „Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 8, 1741, pp. 128-140“, Nachdruck in „Opera Omnia: Series 1, Volume 7, pp. 1 - 10“, Eneström Nummer E53, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Sascha Zielke, im Ramen des Hauptseminars „Euler“ 2013/14

Kneiphof genannt, und der sie umgebende Fluss wird in zwei Zweige geteilt, wie sich aus dem Bild (Fig 1) sehen lässt:

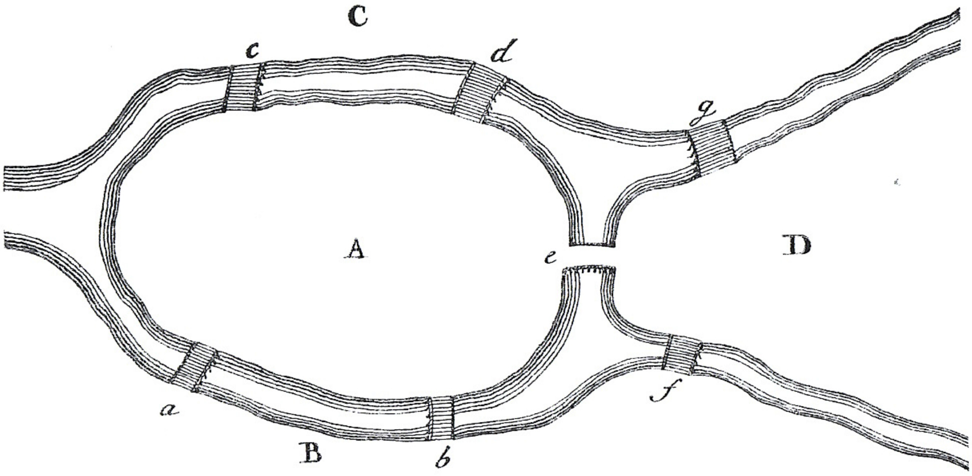

Fig. 1.

Aber über die Zweige dieses Flusses sind sieben Brücken a, b, c, d, e, f und g gebaut worden. Über diese Brücken wurde nun die Frage gestellt, ob jemand die Route so wählen kann, dass er über die einzelnen Brücken einmal und nicht mehr als einmal hinübergeht. Und das dies getan werden kann, so ist es mir gesagt worden, verneinen die einen, bezweifeln die anderen, aber niemand bestätigt es. Ich habe aus diesem für mich das folgende im höchsten Maße allgemeine Problem gebildet: Was auch immer die Form des Flusses und die Aufteilung in Zweige ist und was auch immer die Anzahl der Brücken war, zu finden, ob über die einzelnen Brücken nur einmal hinübergegangen werden kann oder nicht.

§3 Was freilich das Problem über die sieben Brücken von Königsberg betrifft, so könne es aufgelöst werden, indem eine vollständige Aufzählung aller Routen vorgenommen wird, die genommen werden können. Aus diesen würde nämlich bekannt werden, ob eine Route Genüge leistet oder tatsächlich keine. Aber diese Lösungsweise wäre wegen der zu großen Anzahl an Kombinationen zu schwer und aufwendig und könnte bei anderen Fragen über um Vieles mehr Brücken nicht einmal verwendet werden. Wenn auf diese Weise weiter die Operation zu Ende geführt wird, werden viele Dinge gefunden, die nicht in der Frage enthalten waren. Darin besteht ohne Zweifel der Grund der so großen Schwierigkeit. Deswegen habe ich, nach Aufgeben dieser Methode, nach einer anderen gesucht, die mehr nicht schenke, als sie zeige, ob eine solche Route genommen werden kann oder nicht. Ich habe nämlich vermutet, dass eine solche Methode um Vieles einfacher sein wird.

§4 Aber meine ganze Methode ist auf eine geeignete Weise, die einzelnen Brückenübergänge zu bezeichnen, gestützt, in welcher ich die den einzelnen Bereichen, die durch den Fluss getrennt sind, hinzugeschriebenen Großbuchstaben A, B, C, D gebrauche. So, wenn jemand aus dem Bereich A zum Bereich B über die Brücke a oder b hinüberwandert, bezeichne ich diesen Übergang mit den Buchstaben, deren erster den Bereich liefert, von welchem aus der Reisende aufgebrochen ist, der zweite hingegen den Bereich, in welchen er über die Brücke gelangt. Wenn darauf der Reisende aus dem Bereich B in den Bereich D über die Brücke f hinüber geht, wird dieser Übergang mit den Buchstaben BD dargestellt werden. Aber diese zwei nacheinander unternommenen Übergänge AB und BD bezeichne ich nur mit den drei Buchstaben ABD, weil der mittlere B so den Bereich bezeichnet, zu welchem er beim ersten Übergang gelangt, wie den Bereich, aus welchem er beim anderen Übergang herausgeht.

§5 Wenn auf die gleiche Weise der Reisende aus dem Bereich D in den Bereich C über die Brücke g fortschreitet, werde ich diese drei nacheinander gemachten Übergange mit den vier Buchstaben $ABDC$ bezeichnen. Aus diesen vier Buchstaben $ABDC$ wird nämlich eingesehen werden, dass der, sich im Bereich A befindende, Reisende zuerst in den Bereich B hinübergegangen ist, von da aus aber in den Bereich D fortgeschritten ist und von diesem aus weiter nach C aufgebrochen ist. Weil aber diese Bereiche von den Flüssen voneinander getrennt sind, ist es von Nöten, dass der Reisende die Brücken überschritten hat. So wird der über vier Brücken nacheinander unternommene Übergang mit fünf Buchstaben bezeichnet werden. Und wenn der Reisende über wie viele Brücken auch immer hinübergeht, wird seine Wanderung durch die Anzahl von Buchstaben, die um eine Einheit größer ist, als die Anzahl der Brücken, bezeichnet werden. Daher verlangt der Übergang über sieben Brücken, um ihn zu bezeichnen, acht Buchstaben.

§6 Bei dieser Bezeichnungsweise beachte ich nicht, über welche Brücken der Übergang geschehen ist, sondern, wenn derselbe Übergang aus einem Bereich in einen anderen über mehrere Brücken geschehen kann, ist es egal, über welche bestimmte er hinübergeht, solange er in den ausgezeichneten Bereich gelangt. Daher wird eingesehen, wenn die Route über die sieben Brücken des Bildes so durchlaufen werden könnte, dass über die einzelnen einmal und daher über keine zweimal hinübergeschritten wird, dass diese Route mit acht Buchstaben dargestellt werden kann und die Buchstaben so angeordnet sein müssen, dass die unmittelbare Aufeinanderfolge der Buchstaben A und B zweimal auftaucht, weil es die zwei diese Bereiche A und B verbindenden Brücken a und b gibt. Auf die gleiche Weise muss die Aufeinanderfolge der Buchstaben A und C auch zweimal in jener Reihe der acht Buchstaben auftauchen. Darauf wird auch die Aufeinanderfolge der Buchstaben A und D einmal auftreten und gleichermaßen ist es von Nöten, dass die Aufeinanderfolge der Buchstaben B und D und ebenso C und D einmal auftritt.

§7 Die Frage wird also darauf zurückgeführt, dass aus den vier Buchstaben A, B, C und D eine Reihe von Buchstaben gebildet wird, in welcher alle jene Aufeinanderfolgen so oft auftauchen, wie es vorweggenommen worden ist. Bevor aber für eine solche Anordnung Mühe verwendet wird, sollte gezeigt werden, ob diese Buchstaben auf eine solche Weise angeordnet werden können oder nicht. Wenn nämlich bewiesen werden können wird, dass eine Anordnung überhaupt nicht geschehen kann, wird die ganze Arbeit unnütz sein, die, um dies zu leisten, aufgebracht werden würde. Deswegen habe ich eine Regel gesucht, mit deren Hilfe so für diese Frage wie für alle ähnlichen leicht erkannt werden kann, ob eine solche Anordnung einen Platz finden kann.

§8 Ich betrachte, um eine Regel dieser Art zu finden, den einen Bereich A, in welchen wie viele Brücken a, b, c, d etc auch immer hineinführen (Fig 2). Ich betrachte von diesen Brücken zuerst die eine a, die zum Bereich A führe. Wenn nun der Reisende über diese Brücke hinübergeht, musste er sich entweder vor dem Übergang in der Region A befunden haben oder wird nach dem Übergang zu A gelangen. Daher ist in der oben festgelegten Bezeichnungsweise des Übergangs von Nöten, dass der Buchstabe A einmal auftaucht. Wenn drei Brücken, beispielsweise a, b, c, in den Bereich A hineinführen, und der Reisende über alle hinübergeht, dann wird in der Bezeichnung seiner

Wanderung der Buchstabe A zweimal auftauchen, ob er vom Anfang A aus die Route beschritten hat oder nicht. Wenn auf die gleiche Weise fünf Brücken in A hineinführen, muss in der Bezeichnung des Übergangs über sie alle der Buchstabe A dreimal auftauchen. Und wenn die Anzahl der Brücken irgendeine ungerade Zahl war, dann, wenn sie um die Einheit vermehrt wird, wird ihre Hälfte ergeben, wie oft der Buchstabe A auftauchen muss.

§9 Im Fall der zu überschreitenden Brücken in Königsberg (Fig 1), weil zur Insel A fünf Brücken a, b, c, d, e führen, ist es daher von Nöten, dass bei der Bezeichnung des Übergangs über diese Brücken der Buchstabe A dreimal auftaucht. Darauf muss der Buchstabe B, weil in den Bereich B drei Brücken hineinführen, zweimal auftauchen und auf die gleiche Weise muss der Buchstabe D zweimal auftauchen und auch der Buchstabe C zweimal. In der Reihe der acht Buchstaben, mit denen der Übergang über die sieben Brücken bezeichnet werden müsste, müsste also der Buchstabe A dreimal vorhanden sein, jeder einzelne der Buchstaben B, C und D hingegen zweimal. Dies kann in einer Reihe von acht Buchstaben überhaupt nicht geschehen. Daher ist es klar, dass über die sieben Königsbergschen Brücken ein solcher Übergang nicht unternommen werden kann.

§10 Auf die gleiche Weise kann über jeden anderen Fall von Brücken, wenn freilich die Anzahl der Brücken, die in einen gewissen Bereich hineinführen, eine ungerade Zahl war, beurteilt werden, ob über die einzelnen Brücken der Übergang einmal geschehen kann. Wenn es nämlich passiert, dass die Summe aller Stellen, an denen die einzelnen Buchstaben auftauchen müssen, gleich der Anzahl aller Brücken um die Einheit vermehrt ist, dann kann ein solcher Übergang geschehen. Wenn aber, wie es in unserem Beispiel aufgetreten ist, die Summe aller Stellen größer war als die Anzahl der Brücken um eine Einheit vermehrt, dann kann ein solcher Übergang auf keine Weise unternommen werden. Aber die Regel, die ich für das Finden der Anzahl der Stellen A aus der Anzahl der in den Bereich A hineinführenden Brücken gegeben habe, gilt gleichermaßen, ob alle Brücken aus den einen Bereich B, wie im Bild (Fig 2) dargestellt wird, herausführen, oder aus verschiedenen. Ich betrachte nämlich nur den Bereich A und untersuche, an wie vielen Stellen der Buchstabe A auftauchen muss.

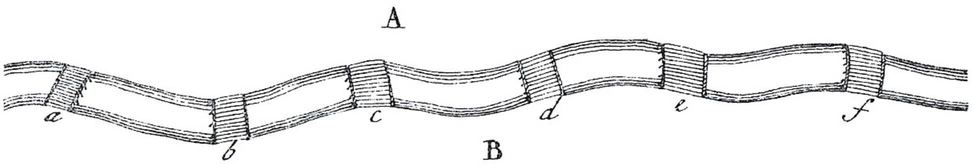

Fig. 2.

§11 Wenn aber die Anzahl der Brücken, die in den Bereich A hineinführen, gerade war, dann ist über den Übergang über die einzelnen anzumerken, ob der Reisende seine Route am Anfang vom Bereich A aus beschritten hat oder nicht. Wenn nämlich zwei Brücken in A hineinführen und der Reisende die Route von A aus begonnen hat, dann muss der Buchstabe A zweimal auftauchen, denn er muss einmal vorhanden sein, um den Ausgang aus A über eine Brücke zu bezeichnen, und auch einmal, um den Rückgang nach A über eine andere Brücke zu bezeichnen. Wenn aber der Reisende die Route von einem anderen Bereich aus begonnen hat, dann wird der Buchstabe A nur einmal auftauchen, denn einmal festgelegt wird er so die Ankunft in A wie den Ausgang daraus bezeichnen, wie ich eine Route dieser Art zu bezeichnen festgesetzt habe.

§12 Es führen nun vier Brücken in den Bereich A hinein und der Reisende beginne die Route von A aus. Dann wird in der Bezeichnung dieser ganzen Route der Buchstabe A dreimal vorhanden sein müssen, weil er freilich über die einzelnen einmal hinübergegangen ist. Aber wenn er von einem anderen Bereich aus zu spazieren begonnen hat, dann wird der Buchstabe A nur zweimal auftauchen. Wenn sechs Brücken zum Bereich A führen, dann wird der Buchstabe A, wenn der Anfang zu gehen von A aus genommen worden ist, viermal auftauchen. Aber wenn der Reisende am Anfang nicht aus A hinausgeht, dann wird der Buchstabe A nur dreimal auftauchen müssen. Daher allgemein: Wenn die Anzahl der Brücken gerade war, dann gibt ihre Hälfte die Anzahl der Stellen an, an denen der Buchstabe A auftauchen muss, wenn der Anfang nicht in dem Bereich A genommen worden ist. Aber die

Hälfte um eine Einheit vermehrt wird die Anzahl der Stellen angeben, wie oft der Buchstabe A auftreten muss, wenn der Anfang der Route im Bereich A selbst genommen worden ist.

§13 Weil aber bei einer solchen Route der Anfang nur aus einem Bereich heraus gemacht werden kann, bestimme ich daher aus der Anzahl der Brücken, die in einen gewissen Bereich führen, die Anzahl der Stellen, wie oft ein einen gewissen Bereich bezeichnender Buchstabe auftauchen muss, so, dass ich die Hälfte der Anzahl der Brücken um eine Einheit vermehrt nehme, wenn die Anzahl der Brücken ungerade war, aber die Hälfte der Anzahl der Brücken selbst, wenn sie gerade war. Wenn darauf die Anzahl aller Stellen der Anzahl der Brücken um eine Einheit vermehrt gleichwertig ist, dann gelingt der gewünschte Übergang, aber der Anfang muss von einem Bereich aus, in welchen eine ungerade Anzahl an Brücken führt, genommen werden. Wenn aber die Anzahl aller Stellen um eine Einheit kleiner war, als die Anzahl der Brücken um die Einheit vermehrt, dann wird der Übergang gelingen, indem von einem Bereich aus begonnen wird, in welchen eine gerade Anzahl an Brücken hineinführt, weil auf diese Weise die Anzahl der Stellen um die Einheit zu vermehren ist.

§14 Nachdem also irgendeine Form des Wassers und Brücken vorgelegt worden sind, führe ich, um zu untersuchen, ob jemand über die einzelnen einmal hinübergehen kann, die Operation auf die folgende Weise durch. Zuerst bezeichne ich die einzelnen durch das Wasser getrennten Bereiche mit den Buchstaben A, B, C etc. Als zweites nehme ich die Anzahl aller Brücken und vermehre sie um die Einheit und hefte die Operation vorn an. Als drittes, nachdem die einzelnen Buchstaben A, B, C etc untereinander geschrieben worden sind, schreibe ich jedem einzelnen die Anzahl der zu dem Bereich führenden Brücken hinzu. Als viertes kennzeichne ich die Buchstaben, die gerade zugeschriebene Zahlen haben, mit einem Stern. Als fünftes füge ich die Hälfte dieser einzelnen geraden Zahlen hinzu, ich schreibe aber selbigen die Hälfen der ungeraden Zahlen um eine Einheit vermehrt hinzu. Als sechstes führe ich diese zuletzt geschriebenen Zahlen zu einer Summe zusammen. Wenn diese Summe entweder um eine Einheit kleiner war als oder gleich der oben vorangestellten war, welche die Anzahl der Brücken um die Einheit vermehrt ist, dann folgere ich, dass der gewünschte Übergang vollzogen werden kann. Es ist dies in der Tat festzuhalten, wenn die gefundene Summe um eine

Einheit kleiner war, als die oben festgelegte Zahl, dass dann der Anfang des Spaziergangs von einem mit einem Stern gekennzeichneten Bereich aus gemacht werden muss, anderenfalls hingegen aus einem nicht gekennzeichneten Bereich, wenn die Summe der davor geschriebenen Zahl gleich war. So führe ich also für den Fall von Königsberg die Operation durch wie folgt:

Bereich	Brücken	Übergänge
A	5	3
B	3	2
C	3	2
D	3	2

Tabelle 1: Anzahl der Brücken ist 7, also maximal 8 Übergänge

Weil also mehr als 8 hervorgeht, kann ein Übergang von dieser Art in keiner Weise geschehen.

§15 Es seien die zwei Inseln *A* und *B* vom Wasser umgeben, mit welchem Wasser sich vier Flüsse verbinden, wie das Bild (Fig 3) darstellt.

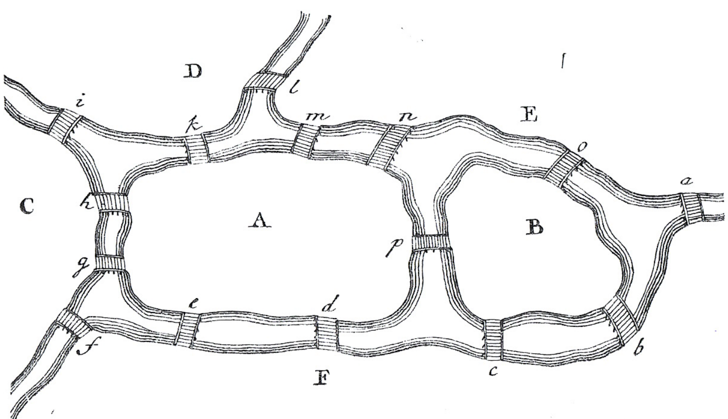

Fig. 3.

Für einen Übergang gebe es weiter über das die Inseln umgebende Wasser und die Flüsse fünfzehn Brücken a, b, c, d etc und es wird gesucht, ob jemand eine Route so nehmen kann, dass er über alle Brücken hinübergeht, aber über keine mehr als einmal. Ich bezeichne also zuerst alle Bereiche, die durch das Wasser voneinander getrennt worden sind, mit den Buchstaben A, B, C, D, E, F, von welcher Art es also sechs Bereiche gibt. Darauf vermehre ich die Anzahl der Brücken 15 um die Einheit und hefte die Summe 16 der folgenden Operation vorn an:

Bereich	Brücken	max. 16 Übergänge
A*	8	4
B*	4	2
C*	4	2
D	3	2
E	5	3
F*	6	3
		Summe: 16

Als drittes schreibe ich also die Buchstaben A, B, C etc. untereinander und lege zu jedem die Anzahl der Brücken, die in das Gebiet führen, fest, wie zu A acht Brücken führen, zu B vier etc. Als viertes kennzeichne ich die Buchstaben, die gerade beigefügte Zahlen haben, mit einem Stern. Als fünftes schreibe ich in die dritte Spalte die Hälfte der geraden Zahlen, vermehre die ungeraden hingegen um die Einheit und füge die Hälfte hinzu. Als sechstes addiere ich die Zahlen der dritten Spalte zueinander und erhalte die Summe 16. Weil diese gleich der oben festgelegten Zahl 16 ist, folgt, dass der Übergang auf die gewünschte Weise geschehen kann, wenn nur die Route entweder vom Bereich D oder E aus begonnen wird, die natürlich nicht mit einem Stern gekennzeichnet sind. Der Lauf wird aber so geschehen können:

$$EaFbBcFdAeFfCgAhCiDkAmEnApBoElD$$

wo ich zwischen den Großbuchstaben die Brücken zugleich untergebracht habe, über welche der Übergang geschieht.

§16 Mit dieser Methode wird es also leicht sein, in einem äußerst verschachtelten Fall zu beurteilen, ob der Übergang über alle Brücken nur einmal geschehen kann oder nicht. Dennoch möchte ich diese noch um Vieles leichtere Art angeben, dasselbe zu erkennen, welche aus dieser Art selbst nicht schwer gefunden werden wird, nachdem ich die folgenden Beobachtungen mitgeteilt haben werde. Zuerst aber bemerke ich, dass alle den einzelnen Buchstaben A, B, C etc hinzugeschriebenen Anzahlen von Brücken zugleich genommen doppelt so groß sind, wie die ganze Anzahl der Brücken. Die Begründung dieser Sache ist, was ich in dieser berechne, in welcher alle in einen gegebenen Bereich führenden Brücken gezählt werden, dass jede beliebige Brücke zweimal gezählt wird. Es wird nämlich jede Brücke auf jedes der beiden Gebiete bezogen, welche sie verbindet.

§17 Es folgt also aus dieser Beobachtung, dass die Summe aller Brücken, die in die einzelnen Bereiche führen, eine gerade Zahl ist, weil ihre Hälfte der Anzahl der Brücken gleich wird. Es kann also nicht geschehen, dass unter der Anzahl der in jeden beliebigen Bereich führenden Brücken eine einzige ungerade ist. Und auch weder das drei ungerade sind, noch fünf etc. Daher, wenn die Buchstaben A, B, C etc hinzugeschriebene Anzahlen der Brücken ungerade sind, ist es von Nöten, dass deren Anzahl eine gerade Zahl ist. So waren im Beispiel von Königsberg die vier den Buchstaben A, B, C, D hinzugeschriebenen Anzahl der Brücken ungerade, wie sich aus §14 sehen lässt. Und im vorhergehenden Beispiel, §15, sind zwei Anzahlen ungerade, nämlich die den Buchstaben D und E hinzugeschriebenen.

§18 Weil die Summe aller den Buchstaben A, B, C etc hinzugefügten Zahlen die Doppelte Anzahl der Brücken ist, ist es offenbar, dass jede Summe um zwei vermehrt und durch 2 geteilt die der Operation vorn angeheftete Anzahl angibt. Wenn also alle den Buchstaben A, B, C, D etc hinzugeschriebenen Zahlen gerade waren und die Hälften dieser einzelnen genommen werden, um die Zahlen der dritten Spalte zu erhalten, wird die Summe dieser Zahlen um eine Einheit kleiner sein als die vorne angeheftete Zahl. Deswegen kann in diesen Fällen immer der Übergang über alle Brücken geschehen. In welchem Gebiet auch immer nämlich die Reise begonnen wird, es wird in Bezug auf die Anzahl gerade zu ihm führende Brücken haben, wie verlangt wird. So kann es im Beispiel von Königsberg geschehen, dass jemand über alle Brücken zweimal hinüberwandert, denn jede beliebige Brücke wird quasi in zwei geteilt und die Anzahl der in ein gewisses Gebiet führenden Brücken wird gerade sein.

§19 Außerdem, wenn nur zwei der Buchstaben A, B, C etc hinzugeschriebenen Zahlen ungerade waren, alle übrigen hingegen gerade, dann wird der gewünschte Übergang immer gelingen, wenn nur der Lauf von einem Gebiet aus, zu welchem eine ungerade Anzahl an Brücken führt, begonnen wird. Wenn nämlich die ungeraden Zahlen zweigeteilt werden und so auch die ungeraden Zahlen um eine Einheit vermehrt, wie es vorgeschrieben worden ist, wird die Summe dieser Hälften um eine Einheit kleiner sein als die Anzahl der Brücken und daher gleich der vorn angehefteten Zahl selbst.
Und aus dieser wird weiter erkannt, wenn es vier oder sechs oder acht etc ungerade Zahlen in der zweiten Spalte gab, dass dann die Summe der Zahlen der dritten Spalte größer sein wird, als die vorn angeheftete Zahl und sie entweder um die Einheit oder zwei oder drei etc übersteigt und deshalb kann der Übergang nicht geschehen. Also wird in irgendeinem Fall sofort sehr leicht erkannt werden können, ob der Übergang über alle Brücken einmal unternommen werden kann oder nicht, und zwar mit Hilfe dieser Regel:

Wenn es mehrere Gebiete gab, bei denen die Anzahl der zu diesen führenden Brücken ungerade ist, dann kann sicher bestätigt werden, dass ein solcher Übergang nicht gegeben ist.
Wenn aber die Anzahl der zu nur zwei Gebieten führenden Brücken ungerade ist, dann wird ein solcher Übergang geschehen können, wenn nur die Route in einem dieser Gebiete begonnen wird.
Wenn es schließlich überhaupt kein Gebiet gab, zu welchem im Bezug auf die Anzahl gerade Brücken führen, dann wird der Übergang auf die gewünschte Weise unternommen werden können, in welchem Gebiet auch immer der Anfang des Spaziergangs festgelegt wird.

Nachdem also diese Regel gegeben worden ist, wird dem vorgelegten Problem vollständig Genüge geleistet.

§21 Wann immer aber gefunden worden ist, dass ein solcher Übergang unternommen werden kann, bleibt die Frage übrig, wie die Route auszurichten ist. Für dies gebrauche ich die folgende Regel: In Gedanken werden, so oft es geschehen kann, zwei Brücken beseitigt, die aus einem Bereich in einen anderen führen, auf welche Weise die Anzahl der Brücken meist gewaltig gemindert wird. Dann werde, was leicht getan wird, die gewünschte Route über die übrigen Brücken gesucht. Nach Finden von dieser stören die in Gedanken beseitigten Brücken diese Route selbst nicht viel, was einem sehr wenig Aufmerksamen leicht klar werden wird. Und ich befinde es nicht von Nöten, mehr Dinge, um die Routen tatsächlich zu bilden, vorzuschreiben.